Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2017-2018*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (30/12/2017)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0001 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Với điều kiện $a,b \in \mathbb{R}$ và $a^2+b^2 \neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a+ib$, $z_1 = (a+ib)e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = (a+ib)e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = (a+ib)e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = (a+ib)e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.

B) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.

C) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.

D) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình vuông và $z_o \equiv z_4$.

Câu 2 Cho số phức $z = \dfrac{5}{2-i} + i^{2018} + e^{2-3i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re} z = 1+e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = 1+e^2\sin 3$	C) $\operatorname{Re} z = 2+e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = e^2\sin 3$
B) $\operatorname{Re} z = 1+e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = 1-e^2\sin 3$	D) $\operatorname{Re} z = 2+e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = -e^2\sin 3$

Câu 3 Ảnh của đường tròn $x^2+y^2=1$ qua phép biến hình $w = \dfrac{3}{z} = u+iv$ là

A) Đường tròn $u^2+v^2=1$.
B) Đường tròn $u^2+v^2=3$.
C) Đường tròn $u^2+v^2=9$.
D) Đường thẳng v = -u .

Câu 4 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên nửa mặt phẳng mở $D = \{z : \operatorname{Im} z < 3\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

B) Nếu hàm $u(x,y)$ điều hòa và $v(x,y)$ không điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) không giải tích trên miền D.

C) Nếu các hàm $u(x,y), v(x,y)$ điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) giải tích trên miền D.

D) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D.

Câu 5 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 7x^2 - 7y^2 + 3x$, $v = 3y + 14xy + 5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.	C) u điều hòa, v không điều hòa.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.	D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 6 Cho phương trình vi phân: $y' - 6y = u(t-2\pi)e^{5(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 8.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY - 6Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-5} + 8$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-6)(p-5)} + \dfrac{8}{p-6}$ (3)

♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-2\pi p}\left(\frac{1}{p-6}-\frac{1}{p-5}\right)+\frac{8}{p-6}$

♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{6(t-2\pi)}-e^{5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi)+8\,e^{6t}$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.	C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.	D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 7 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.

B) Nếu hàm phức $f(z)$= u(x,y) +i v(x,y) không bị chặn (về mudun) trên miền D thì v(x,y) không bị chặn trên miền D.

C) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) +i v(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

D) Cho hàm biến phức $f(z)$= u(x,y) +iv(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} u(x,y) + i\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} v(x,y)$.

Câu 8 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z)=\infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z)=A$ (với $0\neq A\neq\infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z=2i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z)=\dfrac{e^{3z}+z+5i}{(z-2i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z+3i|=4}\dfrac{e^{3z}+z+5i}{(z-2i)^2}dz = 2\pi i(3e^{6i}+1)$

D) $\oint\limits_{|z+4i|=2}\dfrac{e^{3z}+z+5i}{(z-2i)^2}dz = 0$

Câu 9 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\displaystyle\int_0^T e^{-pt}f(t)dt$

B) Nếu $f(t)=\begin{cases}0 & khi\quad 0<t<\pi\\ t-\sin t & khi\quad \pi<t<2\pi\end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\displaystyle\int_\pi^{2\pi} e^{-pt}(t-\sin t)dt$

C) $\mathscr{L}[5+t^3e^{-4t}+6\cos 8t]=\dfrac{5}{p}+\dfrac{3!}{(p+4)^4}+\dfrac{6p}{p^2+64}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{9p-21}{p^2-49}\right]=9ch7t-3sh7t$

Câu 10 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z-2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=2i$ là $e^{\frac{1}{z-2i}}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-2i)^n}$

B) Khai triển Laurent của hàm $f(z)=(z-2i)^4e^{\frac{1}{z-2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o=2i$ là $f(z)=(z-2i)^4\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-2i)^n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!(z-2i)^{n-4}}$

C) $\oint\limits_{|z-2i|=8}(z-2i)^4e^{\frac{1}{z-2i}}dz=2\pi i\dfrac{1}{5!}$

D) $z_o=2i$ là cực điểm cấp 4 của hàm $f(z)=(z-2i)^4e^{\frac{1}{z-2i}}$.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (*1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+7y=3+\sin 4t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

Câu 11 (*1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)= 8e^{-5t}+2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$$

Câu 13 (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-6y=1 \\ x+y'+7y=e^{-2t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)= y(0) = 0$$

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Xác tọa độ gần đúng trong mặt phẳng Oxy của điểm $M\left(x(t);y(t)\right)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11, Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 28 tháng 12 năm 2017

Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0011-3012-2017-0011-0001</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (30/12/2017)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ ***HỌC KỲ I NĂM HỌC 2017-2018***
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (30/12/2017)
Đề thi gồm 3 trang **Được phép sử dụng tài liệu**
Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0010 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào ***BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM*** **ở trang 6)**

Câu 1 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.

B) Nếu hàm phức $f(z)$= u(x,y) +i v(x,y) không bị chặn (về mudun) trên miền D thì v(x,y) không bị chặn trên miền D.

C) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) +i v(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

D) Cho hàm biến phức $f(z)$= u(x,y) +iv(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z\to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x\to x_o \\ y\to y_o}} u(x,y) + i \lim\limits_{\substack{x\to x_o \\ y\to y_o}} v(x,y)$.

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z = 2i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z+3i|=4} \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2} dz = 2\pi i(3e^{6i} + 1)$

D) $\oint\limits_{|z+4i|=2} \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2} dz = 0$

Câu 3 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\displaystyle\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B) Nếu $f(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad 0 < t < \pi \\ t - \sin t & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\displaystyle\int_\pi^{2\pi} e^{-pt}(t-\sin t)dt$

C) $\mathscr{L}[5 + t^3 e^{-4t} + 6\cos 8t] = \dfrac{5}{p} + \dfrac{3!}{(p+4)^4} + \dfrac{6p}{p^2+64}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{9p-21}{p^2-49}\right] = 9ch7t - 3sh7t$

Câu 4 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z-2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 2i$ là $e^{\frac{1}{z-2i}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-2i)^n}$

B) Khai triển Laurent của hàm $f(z) = (z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 2i$ là $f(z) = (z-2i)^4 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-2i)^{n-4}}$

C) $\oint\limits_{|z-2i|=8}(z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}}dz = 2\pi i\dfrac{1}{5!}$ D) $z_o = 2i$ là cực điểm cấp 4 của hàm $f(z) = (z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}}$.

Câu 5 Với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a + ib$, $z_1 = (a+ib)e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = (a+ib)e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = (a+ib)e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = (a+ib)e^{i\frac{8\pi}{5}}$.

Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.

B) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.

C) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.

D) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình vuông và $z_o \equiv z_4$.

Câu 6 Cho số phức $z = \dfrac{5}{2-i} + i^{2018} + e^{2-3i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re} z = 1 + e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = 1 + e^2\sin 3$

B) $\operatorname{Re} z = 1 + e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = 1 - e^2\sin 3$

C) $\operatorname{Re} z = 2 + e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = e^2\sin 3$

D) $\operatorname{Re} z = 2 + e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = -e^2\sin 3$

Câu 7 Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ qua phép biến hình $w = \dfrac{3}{z} = u + iv$ là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = 1$.

B) Đường tròn $u^2 + v^2 = 3$.

C) Đường tròn $u^2 + v^2 = 9$.

D) Đường thẳng v = -u .

Câu 8 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên nửa mặt phẳng mở $D = \{z : \operatorname{Im} z < 3\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

B) Nếu hàm $u(x, y)$ điều hòa và $v(x, y)$ không điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) không giải tích trên miền D.

C) Nếu các hàm $u(x, y), v(x, y)$ điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) giải tích trên miền D.

D) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D.

Câu 9 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x, y) = 7x^2 - 7y^2 + 3x$, $v = 3y + 14xy + 5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.

B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.

C) u điều hòa, v không điều hòa.

D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 10 Cho phương trình vi phân: $y' - 6y = u(t-2\pi)e^{5(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 8.

Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY - 6Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-5} + 8$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : $Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-6)(p-5)} + \dfrac{8}{p-6}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: $Y = e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-6} - \dfrac{1}{p-5}\right) + \dfrac{8}{p-6}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: $y = \left(e^{6(t-2\pi)} - e^{5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi) + 8\,e^{6t}$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.

B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.

C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.

D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

<u>Câu 11</u> (*1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+7y=3+\sin 4t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

<u>Câu 11</u> (*1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t) = 8e^{-5t}+2\int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du$$

<u>Câu 13</u> (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-6y=1 \\ x+y'+7y=e^{-2t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)=y(0)=0$$

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Xác tọa độ gần đúng trong mặt phẳng Oxy của điểm $M\left(x(t);y(t)\right)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11, Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 28 tháng 12 năm 2017

Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0011-3012-2017-0011-0010</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:...............................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (30/12/2017)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2017-2018*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (30/12/2017)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0011 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 7x^2 - 7y^2 + 3x$, $v = 3y + 14xy + 5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

Câu 2 Cho phương trình vi phân: $y' - 6y = u(t-2\pi)e^{5(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 8.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- ♦ Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY - 6Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-5} + 8$ (2)
- ♦ Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-6)(p-5)} + \dfrac{8}{p-6}$ (3)
- ♦ Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-6} - \dfrac{1}{p-5}\right) + \dfrac{8}{p-6}$
- ♦ Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{6(t-2\pi)} - e^{5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi) + 8e^{6t}$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 3 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.
B) Nếu hàm phức $f(z)$= u(x,y) +i v(x,y) không bị chặn (về mudun) trên miền D thì v(x,y) không bị chặn trên miền D.
C) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) +i v(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.
D) Cho hàm biến phức $f(z)$= u(x,y) +iv(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) + i \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y)$.

Câu 4 Khẳng định nào sau đây sai*?*

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z\to a}(z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.
B) $z = 2i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2}$
C) $\oint\limits_{|z+3i|=4} \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2} dz = 2\pi i(3e^{6i} + 1)$
D) $\oint\limits_{|z+4i|=2} \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2} dz = 0$

Câu 5 Giả sử $\mathscr{L}[f(t)] = F(p)$. Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B) Nếu $f(t)=\begin{cases} 0 & khi \quad 0<t<\pi \\ t-\sin t & khi \quad \pi<t<2\pi \end{cases}$ và $f(t+2\pi) = f(t)$ thì $\mathscr{L}[f(t)] = \dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_\pi^{2\pi} e^{-pt}(t-\sin t)dt$

C) $\mathscr{L}[5+t^3e^{-4t}+6\cos 8t] = \dfrac{5}{p}+\dfrac{3!}{(p+4)^4}+\dfrac{6p}{p^2+64}$ D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{9p-21}{p^2-49}\right] = 9ch7t - 3sh7t$

Câu 6 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z-2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 2i$ là $e^{\frac{1}{z-2i}} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-2i)^n}$

B) Khai triển Laurent của hàm $f(z) = (z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 2i$ là $f(z) = (z-2i)^4\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{1}{n!(z-2i)^{n-4}}$

C) $\oint_{|z-2i|=8}(z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}}dz = 2\pi i\dfrac{1}{5!}$ **D)** $z_o = 2i$ là cực điểm cấp 4 của hàm $f(z) = (z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}}$.

Câu 7 Với điều kiện $a,b\in\mathbb{R}$ và $a^2+b^2\neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a+ib$, $z_1 = (a+ib)e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = (a+ib)e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = (a+ib)e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = (a+ib)e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.

B) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.

C) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.

D) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình vuông và $z_o \equiv z_4$.

Câu 8 Cho số phức $z = \dfrac{5}{2-i} + i^{2018} + e^{2-3i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re} z = 1+e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = 1+e^2\sin 3$

B) $\operatorname{Re} z = 1+e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = 1-e^2\sin 3$

C) $\operatorname{Re} z = 2+e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = e^2\sin 3$

D) $\operatorname{Re} z = 2+e^2\cos 3$, $\operatorname{Im} z = -e^2\sin 3$

Câu 9 Ảnh của đường tròn $x^2+y^2=1$ qua phép biến hình $w = \dfrac{3}{z} = u+iv$ là

A) Đường tròn $u^2+v^2=1$.

B) Đường tròn $u^2+v^2=3$.

C) Đường tròn $u^2+v^2=9$.

D) Đường thẳng v = -u .

Câu 10 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên nửa mặt phẳng mở $D=\{z:\operatorname{Im} z<3\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

B) Nếu hàm $u(x,y)$ điều hòa và $v(x,y)$ không điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) không giải tích trên miền D.

C) Nếu các hàm $u(x,y), v(x,y)$ điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) giải tích trên miền D.

D) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D.

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

Câu 11 (*1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+7y=3+\sin 4t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

Câu 12 (*1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)=8e^{-5t}+2\int_0^t y(u)\cos(t-u)\,du$$

Câu 13 (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-6y=1 \\ x+y'+7y=e^{-2t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)=y(0)=0$$

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Xác tọa độ gần đúng trong mặt phẳng Oxy của điểm $M(x(t);y(t))$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11, Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 28 tháng 12 năm 2017
Thông qua Bộ môn Toán

<table>
<tr><td colspan="2">TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM
BỘ MÔN TOÁN
THI CUỐI KỲ HỌC KỲ I NĂM HỌC 2017-2018
MÔN: HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE
Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0011</td><td rowspan="3">Họ, tên sinh viên: ....
Mã số sinh viên:................................
Số báo danh (STT):........ Phòng thi: ....
Thời gian : 90 phút (30/12/2017)
Lưu ý: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải.
Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.</td></tr>
<tr><td>Giám thị 1</td><td>Giám thị 2</td></tr>
<tr><td>Giáo viên chấm thi 1&2</td><td>ĐIỂM</td></tr>
</table>

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Trường ĐH Sư phạm Kỹ thuật Tp.HCM
KHOA KHOA HỌC ỨNG DỤNG
BỘ MÔN TOÁN

ĐỀ THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2017-2018*
MÔN: ***HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE***
Mã môn học: **MATH 121201** *Thời gian*: 90 phút (30/12/2017)
Đề thi gồm 3 trang ***Được phép sử dụng tài liệu***
Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0100 (**Nộp lại đề này**)

PHẦN TRẮC NGHIỆM LỰA CHỌN (5,0 điểm)

(Chọn 1 trong các câu A, B, C, D rồi điền vào *BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM* ở trang 6)

Câu 1 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Khai triển Laurent của $e^{\frac{1}{z-2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 2i$ là $e^{\frac{1}{z-2i}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-2i)^n}$

B) Khai triển Laurent của hàm $f(z) = (z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}}$ quanh điểm bất thường cô lập $z_o = 2i$ là $f(z) = (z-2i)^4 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-2i)^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!(z-2i)^{n-4}}$

C) $\oint\limits_{|z-2i|=8} (z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}} dz = 2\pi i \frac{1}{5!}$

D) $z_o = 2i$ là cực điểm cấp 4 của hàm $f(z) = (z-2i)^4 e^{\frac{1}{z-2i}}$.

Câu 2 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) bị chặn (về mudun) trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) bị chặn trên miền D.

B) Nếu hàm phức $f(z)$= u(x,y) +i v(x,y) không bị chặn (về mudun) trên miền D thì v(x,y) không bị chặn trên miền D.

C) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) +i v(x,y) liên tục trên miền D khi và chỉ khi các hàm thực u(x,y), v(x,y) liên tục trên miền D.

D) Cho hàm biến phức $f(z)$= u(x,y) +iv(x,y), $z_0 = x_0 + iy_0$ và giả sử các giới hạn đều tồn tại. Khi đó: $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} u(x,y) + i \lim\limits_{\substack{x \to x_o \\ y \to y_o}} v(x,y)$.

Câu 3 Với điều kiện $a, b \in \mathbb{R}$ và $a^2 + b^2 \neq 0$, xét ***biểu diễn hình học*** của các số phức (trên cùng một mặt phẳng phức): $z_o = a + ib$, $z_1 = (a+ib)e^{i\frac{2\pi}{5}}$, $z_2 = (a+ib)e^{i\frac{4\pi}{5}}$, $z_3 = (a+ib)e^{i\frac{6\pi}{5}}$, $z_4 = (a+ib)e^{i\frac{8\pi}{5}}$.
Khẳng định nào sau đây sai?

A) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một hình ngũ giác đều.

B) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với năm đỉnh một ngôi sao năm cánh đều.

C) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học cùng thuộc một đường tròn tâm là gốc tọa độ $O(0,0)$.

D) z_o, z_1, z_2, z_3, z_4 có biểu diễn hình học tương ứng với bốn đỉnh một hình vuông và $z_o \equiv z_4$.

Câu 4 Cho số phức z = $\frac{5}{2-i} + i^{2018} + e^{2-3i}$. Khi đó, phần thực và phần ảo của z là:

A) $\operatorname{Re} z = 1 + e^2 \cos 3$, $\operatorname{Im} z = 1 + e^2 \sin 3$

B) $\operatorname{Re} z = 1 + e^2 \cos 3$, $\operatorname{Im} z = 1 - e^2 \sin 3$

C) $\operatorname{Re} z = 2 + e^2 \cos 3$, $\operatorname{Im} z = e^2 \sin 3$

D) $\operatorname{Re} z = 2 + e^2 \cos 3$, $\operatorname{Im} z = -e^2 \sin 3$

Câu 5 Khẳng định nào sau đây sai?

A) Nếu a là điểm bất thường cô lập của hàm $f(z)$ và $\lim\limits_{z \to a} f(z) = \infty$, $\lim\limits_{z \to a} (z-a)^m f(z) = A$ (với $0 \neq A \neq \infty$) thì a là cực điểm cấp m của hàm $f(z)$.

B) $z = 2i$ là cực điểm cấp 2 của hàm $f(z) = \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2}$

C) $\oint\limits_{|z+3i|=4} \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2} dz = 2\pi i(3e^{6i} + 1)$

D) $\oint\limits_{|z+4i|=2} \dfrac{e^{3z} + z + 5i}{(z-2i)^2} dz = 0$

Câu 6 Giả sử $\mathscr{L}$[f(t)] = F(p). Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu f(t) là hàm gốc tuần hoàn với chu kỳ **T** thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-Tp}}\int_0^T e^{-pt} f(t)dt$

B) Nếu $f(t) = \begin{cases} 0 & khi \quad 0 < t < \pi \\ t - \sin t & khi \quad \pi < t < 2\pi \end{cases}$ và f(t+2π) = f(t) thì $\mathscr{L}$[f(t)] = $\dfrac{1}{1-e^{-\pi p}}\int_\pi^{2\pi} e^{-pt}(t-\sin t)dt$

C) $\mathscr{L}[5 + t^3 e^{-4t} + 6\cos 8t] = \dfrac{5}{p} + \dfrac{3!}{(p+4)^4} + \dfrac{6p}{p^2+64}$

D) $\mathscr{L}^{-1}\left[\dfrac{9p-21}{p^2-49}\right] = 9ch7t - 3sh7t$

Câu 7 Cho phương trình vi phân: $y' - 6y = u(t-2\pi)e^{5(t-2\pi)}$ (1) với điều kiện ban đầu y(0) = 8.
Để giải phương trình vi phân này ta làm như sau: Đặt Y = Y(p)= $\mathscr{L}$[y(t)]

- Biến đổi Laplace hai vế phương trình (1) ta được: $pY - 6Y = \dfrac{e^{-2\pi p}}{p-5} + 8$ (2)
- Giải phương trình (2) với Y là ẩn ta được : Y= $\dfrac{e^{-2\pi p}}{(p-6)(p-5)} + \dfrac{8}{p-6}$ (3)
- Phân tích vế phải của (3) thành phân thức đơn giản ta được: Y = $e^{-2\pi p}\left(\dfrac{1}{p-6} - \dfrac{1}{p-5}\right) + \dfrac{8}{p-6}$
- Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm: y = $\left(e^{6(t-2\pi)} - e^{5(t-2\pi}\right)u(t-2\pi) + 8e^{6t}$

A) Cách làm sai, tính toán sai, kết quả sai.
B)Cách làm sai, tính toán đúng, kết quả sai.
C) Cách làm đúng, tính toán đúng, kết quả đúng.
D)Cách làm đúng, tính toán sai, kết quả sai.

Câu 8 Ảnh của đường tròn $x^2 + y^2 = 1$ qua phép biến hình w = $\dfrac{3}{z} = u + iv$ là

A) Đường tròn $u^2 + v^2 = 1$.
B) Đường tròn $u^2 + v^2 = 3$.
C) Đường tròn $u^2 + v^2 = 9$.
D) Đường thẳng v = -u .

Câu 9 Khẳng định nào sau đây **sai?**

A) Nếu hàm u(x,y) và v(x,y) điều hòa và thỏa điều kiện (C-R) trên nửa mặt phẳng mở $D = \{z : \operatorname{Im} z < 3\}$ thì hàm $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) giải tích trên D.

B) Nếu hàm $u(x,y)$ điều hòa và $v(x,y)$ không điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) không giải tích trên miền D.

C) Nếu các hàm $u(x,y), v(x,y)$ điều hòa trên miền D thì hàm $f(z)$ = u(x,y)+ iv(x,y) giải tích trên miền D.

D) Hàm phức $f(z)$ = u(x,y) + iv(x,y) khả vi trên miền D khi và chỉ khi các hàm u(x,y), v(x,y) khả vi và thỏa điều kiện Cauchy – Reimann trên miền D.

Câu 10 Trong mặt phẳng phức, cho các hàm số $u(x,y) = 7x^2 - 7y^2 + 3x$, $v = 3y + 14xy + 5$. Khẳng định nào sau đây **đúng?**

A) u, v điều hòa nhưng không là các hàm điều hòa liên hợp.
B) u, v là các hàm điều hòa liên hợp.
C) u điều hòa, v không điều hòa.
D) v điều hòa, u không điều hòa

PHẦN TỰ LUẬN (5,0 điểm)

<u>Câu 11</u> (*1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân

$$y''+8y'+7y=3+\sin 4t \text{ với điều kiện } y(0)=0 \text{ và } y'(0)=0$$

<u>Câu 11</u> (*1,5điểm*) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình tích phân

$$y(t)=8e^{-5t}+2\int_0^t y(u)\cos(t-u)du$$

<u>Câu 13</u> (2 *điểm*)

a) Áp dụng phép biến đổi Laplace giải hệ phương trình vi phân

$$\begin{cases} x'-6y=1 \\ x+y'+7y=e^{-2t} \end{cases}, \text{ điều kiện } x(0)=y(0)=0$$

b) Tính $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t)$, $\lim\limits_{t\to+\infty} y(t)$. Xác tọa độ gần đúng trong mặt phẳng Oxy của điểm $M\left(x(t);y(t)\right)$ sau khoảng thời gian t đủ lớn.

Ghi chú : *Cán bộ coi thi không được giải thích đề thi.*

CHUẨN ĐẦU RA

Nội dung kiểm tra	**Chuẩn đầu ra của học phần (về kiến thức)**
Từ câu 1 đến câu 10	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.1, 2.1.2, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3
Câu 11, Câu 12, Câu 13: Áp dụng phép biến đổi Laplace giải phương trình vi phân, hệ phương trình vi phân rồi ứng dụng vào đời sống.	G1: 1.1, 1.2 G2: 2.1.3, 2.1.3, 2.1.4 , 2.4.3

Ngày 28 tháng 12 năm 2017

Thông qua Bộ môn Toán

TRƯỜNG ĐH SƯ PHẠM KỸ THUẬT TP.HCM BỘ MÔN TOÁN **THI CUỐI KỲ *HỌC KỲ I NĂM HỌC 2017-2018*** **MÔN**: **HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE** Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0100		Họ, tên sinh viên: .... Mã số sinh viên:............................... Số báo danh (***STT***):........ Phòng thi: .... *Thời gian* : 90 phút (30/12/2017) **Lưu ý**: Sinh viên làm bài thi lần lượt trên trang 6, 5, 4,3. Đối với các hệ phương trình đại số tuyến tính thì chỉ cần ghi kết quả vào bài làm mà không cần trình bày cách giải. ***Sinh viên nộp lại đề thi cùng với bài làm.***
Giám thị 1	***Giám thị 2***	
Giáo viên chấm thi 1&2	**ĐIỂM**	

BÀI LÀM PHẦN TRẮC NGHIỆM

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời										

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

ĐÁP ÁN MÔN

HÀM BIẾN PHỨC VÀ PHÉP BIẾN ĐỔI LAPLACE

(Ngày thi**: 30**/12/2017)

PHẦN TRẮC NGHIỆM

Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0001

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	**D**	**B**	**C**	**C**	**B**	**C**	**B**	**0.5(*); C**	**B**	**D,B(**)**

Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0010

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	**B**	**0.5(*); C**	**B**	**D,B(**)**	**D**	**B**	**C**	**C**	**B**	**C**

Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0011

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	**B**	**C**	**B**	**0.5(*); C**	**B**	**D,B(**)**	**D**	**B**	**C**	**C**

Mã đề: 0010-3012-2017-0011-0100

Câu hỏi	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Trả lời	**D,B(**)**	**B**	**D**	**B**	**0.5(*); C**	**B**	**C**	**C**	**C**	**B**

(*) Tất cả bài thi đều được 0.5 điểm câu này. **(do lỗi đánh máy+in+photo)**

(**) có chọn B-là do lỗi đánh máy ‘ $z_o = 2i$ ’ thành ‘ $z_o = i$ ’ trong đề thi chính thức.

BÀI LÀM PHẦN TỰ LUẬN

Câu hỏi	**Nội dung**	*Điểm*
Câu 11		**1 điểm**
	Đặt $Y = Y(p) = \mathscr{L}[\mathrm{y(t)}]$. Biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và tính chất đạo hàm hàm gốc ta được:	
	$p^2Y - py(0) - y'(0) + 8(pY - y(0)) + 7Y = \mathscr{L}[3 + \sin 4t]$	0,25đ
	$\Leftrightarrow Y(p^2 + 8p + 7) = \dfrac{3}{p} + \dfrac{4}{p^2 + 16}$	0,25đ
	$\Leftrightarrow Y = \dfrac{3p^2 + 4p + 48}{p(p+1)(p+7)(p^2+16)}$	0,25đ

Phân tích thành phân thức đơn giản

$$Y=\frac{3p^2+4p+48}{p(p+1)(p+7)(p^2+16)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+7}+\frac{Dp+4E}{p^2+16}$$

0,25đ

Biếi đổi Laplace ngược hai vế và áp dụng tính chất tuyến tính ta được

$$y(t)=\mathscr{L}^{-1}[Y]=\mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p}+B\frac{1}{p+1}+C\frac{1}{p+7}+D\frac{p}{p^2+16}+E\frac{4}{p^2+16}]$$

$$\Leftrightarrow y(t)=A+Be^{-t}+Ce^{-7t}+D\cos 4t+E\sin 4t$$

Tìm A,B,C,D dựa vào đẳng thức:

0,5đ

$$\frac{3p^2+4p+48}{p(p+1)(p+7)(p^2+16)}\overset{(*)}{=}\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}+\frac{C}{p+7}+\frac{Dp+4E}{p^2+16}$$

$$A=\frac{3\times 0^2+4\times 0+48}{(0+1)(0+7)(0^2+16)}=\frac{3}{7},\quad B=\frac{3\times(-1)^2+4\times(-1)+48}{(-1)(-1+7)((-1)^2+16)}=-\frac{47}{102}$$

$$C=\frac{3\times(-7)^2+4\times(-7)+48}{(-7)(-7+1)((-7)^2+16)}=\frac{167}{2730}$$

Từ đẳng thức (*)

$$\begin{cases} Cho \quad p=1: & \frac{55}{432}=\frac{A}{1}+\frac{B}{1+1}+\frac{C}{1+7}+\frac{D+4E}{1^2+16} \\ Cho \quad p=-2: & \frac{13}{50}=\frac{A}{-2}+\frac{B}{-2+1}+\frac{C}{-2+7}+\frac{-2D+4E}{(-2)^2+16} \end{cases}$$

Thay $A=\frac{3}{7},B=-\frac{47}{102},C=\frac{167}{2730}$ vào hệ trên rồi giải tìm D,E ta được

$$D=-\frac{32}{1105},E=-\frac{9}{1105}$$

Vậy nghiệm phương trình vi phân là

$$y(t)=\frac{3}{7}-\frac{47}{102}e^{-t}+\frac{167}{2730}e^{-7t}-\frac{32}{1105}\cos 4t-\frac{9}{1105}\sin 4t$$

Câu 12 1,5đ

Áp dụng tích chập, phương trình được viết lại

$$y(t)=8e^{-5t}+2y(t)*\cos t$$

Đặt Y = Y(p) = $\mathscr{L}$[y(t)] biến đổi Laplace hai vế phương trình, áp dụng tính chất tuyến tính và định lý Borel ta được

$\mathscr{L}[y(t)]=\mathscr{L}[8e^{-5t}]+2\mathscr{L}[y(t)*\cos t]$

$Y=\frac{8}{p+5}+2\mathscr{L}[y(t)]\,\mathscr{L}[\cos t]$

0,5đ

$$\Leftrightarrow \; Y = \frac{8}{p+5} + 2Y\frac{p}{p^2+1}$$

0,25đ

Giải phương trình với Y là ẩn ta được

$$Y = \frac{8(p^2+1)}{(p+5)(p-1)^2} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p+5} + \frac{B(p-1)+C}{(p-1)^2} = \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2}$$

0,25đ

Biến đổi Laplace ngược hai vế ta được nghiệm

$$y(t) = \mathscr{L}^{-1}[Y] = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p+5} + B\frac{1}{p-1} + C\frac{1}{(p-1)^2}]$$

$$\Leftrightarrow \; y(t) = Ae^{-5t} + Be^{-t} + Cte^{-t}$$

0,5đ

Tìm A, B, C dựa vào đẳng thức (*)

$$\frac{8(p^2+1)}{(p+5)(p-1)^2} \overset{(*)}{=} \frac{A}{p+5} + \frac{B}{p-1} + \frac{C}{(p-1)^2}$$

$$A = \frac{52}{9}, \quad B = \frac{20}{9}, \quad C = \frac{8}{3}$$

Vậy nghiệm phương trình tích phân là $y(t) = \frac{52}{9}e^{-5t} + \frac{20}{9}e^{-t} + \frac{8}{3}te^{-t}$

Câu 13 ***2 đ***

Đặt $X = \mathscr{L}[x], Y = \mathscr{L}[y]$; biến đổi Laplace hai vế ta được:

$$\begin{cases} \mathscr{L}[x'] - 6\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[1] \\ \mathscr{L}[x] + \mathscr{L}[y'] + 7\mathscr{L}[y] = \mathscr{L}[e^{-2t}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} pX - 6Y = \frac{1}{p} \\ X + (p+7)Y = \frac{1}{p+2} \end{cases}$$

0.5đ

$$\Leftrightarrow \begin{cases} X = \frac{p+14}{p(p+2)(p+6)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+6} \\ Y = \frac{p-2}{p(p+2)(p+6)} = \frac{D}{p} + \frac{E}{p+2} + \frac{F}{p+6} \end{cases}$$

0.5đ

Biến đổi ngược hai vế ta được: $\begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[X] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[Y] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \mathscr{L}^{-1}[A\frac{1}{p} + B\frac{1}{p+2} + C\frac{1}{p+6}] \\ y = \mathscr{L}^{-1}[D\frac{1}{p} + E\frac{1}{p+2} + F\frac{1}{p+6}] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = A + Be^{-2t} + Ce^{-6t} \\ y = D + Ee^{-2t} + Fe^{-6t} \end{cases}$$

0.5đ

- Tìm A, B, C dựa vào

$$\frac{p+14}{p(p+2)(p+6)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+2} + \frac{C}{p+6}$$

$$A = \frac{0+14}{(0+2)(0+6)} = \frac{7}{6}, \quad B = \frac{-2+14}{(-2)(-2+6)} = -\frac{3}{2}, \quad C = \frac{-6+14}{(-6)(-6+2)} = \frac{1}{3}$$

	♦ Tìm D,E,F dựa vào $\frac{p-2}{p(p+2)(p+6)}=\frac{D}{p}+\frac{E}{p+2}+\frac{F}{p+6}$ $D=\frac{0-2}{(0+2)(0+6)}=-\frac{1}{6}$, $E=\frac{-2-2}{(-2)(-2+6)}=\frac{1}{2}$, $F=\frac{-6-2}{(-6)(-6+2)}=-\frac{1}{3}$ b) $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}[A+Be^{-t}+Ce^{-3t}]=A;\lim\limits_{t\to+\infty}y(t)=\lim\limits_{t\to+\infty}[D+Ee^{-t}+Fe^{-3t}]=D$ Sau khoảng thời gian t đủ lớn, tọa độ gần đúng điểm M là $M(\frac{7}{6};-\frac{1}{3})$.	***0.5đ***

*** HẾT***